



## GROTE OPDRACHTEN LEERGEBIED REKENEN EN WISKUNDE

Voorliggende grote opdrachten zijn opgesteld door het ontwikkelteam Rekenen en Wiskunde tijdens de tweede en derde ontwikkelsessies van Curriculum.nu (mei en oktober 2018). Het team heeft deze grote opdrachten op basis van de ontvangen feedback aangescherpt tijdens de derde ontwikkelsessie (december 2018).

Grote opdrachten beschrijven de essentie van het leergebied. Op basis van de grote opdrachten formuleert het ontwikkelteam vervolgens bouwstenen. Bouwstenen beschrijven de benodigde kennis en vaardigheden. De bouwstenen vormen uiteindelijk, samen met de visie en de grote opdrachten, input voor de herziening van de kerndoelen en eindtermen.

### Over Curriculum.nu

Het is belangrijk dat de inhoud van het onderwijs tegemoet komt aan de eisen die nu en in de toekomst gesteld worden aan mensen. Curriculum.nu gaat over de actualisatie van het curriculum, waarin is vastgelegd wat leerlingen moeten kennen en kunnen. Teams van leraren en schoolleiders ontwikkelen samen bouwstenen als basis voor de herziening van de kerndoelen in het primair onderwijs en de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Daarnaast doen zij aanbevelingen voor de bovenbouw in het voortgezet onderwijs. De curriculumherziening biedt kansen om te zorgen voor doorlopende leerlijnen van primair naar voortgezet onderwijs en van voortgezet onderwijs naar vervolgonderwijs. De bouwstenen bevatten een aanzet daartoe. De curriculumherziening wil daarnaast de samenhang in het onderwijs bevorderen, de overladenheid terugdringen en een betere balans brengen in de hoofddoelen van het onderwijs: kwalificatie, socialisatie en persoonlijke vorming.

Kijk voor meer informatie op [www.curriculum.nu](http://www.curriculum.nu).

Januari 2019

De grote opdrachten zijn opgesteld op basis van de visie op het leergebied. Wilt u deze visie bekijken? Kijk op <https://curriculum.nu/rekenen-en-wiskunde>.

### **Grote opdracht 1: Getallen en bewerkingen. *De wereld draait om getallen***

#### **Relevantie**

Deze grote opdracht vormt een belangrijk fundament voor Rekenen & Wiskunde en de meeste andere leergebieden in alle fases van het primair en voortgezet onderwijs en binnen alle andere grote opdrachten.

De wereld om ons heen zit vol getallen: in het verkeer, de winkel, de keuken, in de beroepspraktijk, op internet en op de beurs. In onze maatschappij zijn steeds meer digitale hulpmiddelen die het complexere rekenwerk kunnen overnemen. Deze verandering heeft impact op de aard van op te lossen problemen en op de wijze waarop we problemen oplossen, de wijze van redeneren en op de wijze van communiceren.

Als we met een wiskundige bril naar de wereld kijken, zien we dat getallen verschillende betekenissen en functies kunnen hebben. Getallen kunnen namen (buslijn 7), aantallen of maten aanduiden; denk bijvoorbeeld aan tijd, geld, getallen op displays/meetinstrumenten, op verpakkingen en in gebruiksaanwijzingen. Maar met getallen kan ook gerekend worden. Inzicht hebben in getallen en bewerkingen en ermee kunnen werken is een noodzakelijke voorwaarde om te kunnen functioneren in onze voortdurend veranderende maatschappij (gecijferdheid).



De toename van digitale hulpmiddelen die het complexere rekenwerk van ons overnemen maakt dat schattend rekenen een belangrijkere vaardigheid wordt. Het is van belang dat een leerling zich ervan bewust is in welke situaties schattend rekenen volstaat, bijvoorbeeld bij de vraag hoeveel mensen er ongeveer op het perron staan te wachten, maar ook wanneer niet. Bijvoorbeeld als het gaat om doceren van medicijnen, salaris en wisselgeld. Met schattend rekenen kan een leerling zijn antwoorden en die van anderen controleren. Ook al vermindert deze ontwikkeling de nadruk op vlot cijferend kunnen rekenen met grote getallen, begrip van en vaardigheid in het uitvoeren van bewerkingen volgens vaste of meer flexibele procedures blijft van groot belang voor de verdere wiskundige ontwikkeling en voor de redzaamheid. Bedenk alleen maar waarop men terug moet vallen als (digitale) hulpmiddelen even niet beschikbaar zijn en om te controleren of de invoer juist was. Hoewel er verschuivingen optreden in de vaardigheden die leerlingen moeten leren om goed om te gaan met getallen en bewerkingen, is er door de komst van digitale hulpmiddelen wel een reductie van de leerstof mogelijk.

Van goed kunnen omgaan met getallen en bewerkingen heb je een leven lang plezier: in andere leergebieden, in het beroepenveld, als privépersoon en als burger.

### **Inhoud van de opdracht**

Bij deze grote opdracht gaat het enerzijds om het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van getallen en bewerkingen, anderzijds gaat het om het ontwikkelen van het vermogen op de volgende wiskundige bekwaamheden: probleemoplossen, abstraheren, logisch redeneren, representeren en communiceren, schematiseren en modelleren en algoritmisch denken.

#### *Ontluikende gecijferdheid*

Kinderen komen al op jonge leeftijd in aanraking met aantallen, nummers, cijfers en getallen. Aanvankelijk worden getallen nog gekoppeld aan hoeveelheden. In het volgende stadium **abstraheren** leerlingen: ze gaan getallen zien als objecten, die je los kunt zien van een context ('drie', in plaats van 'drie appels'). Langzamerhand gaan de getallen voor het kind leven. Ze zien dat getallen bepaalde betekenissen en functies hebben en er ontstaat bij kinderen elementair getalbegrip, zoals hoeveelheden kunnen tellen en vergelijken. Hierbij kunnen de kinderen ook de juiste reken-/wiskunde taal toepassen. Ze gaan getsymbolen herkennen en weten dat er een vaste volgorde is.

#### *Getallen en getalbegrip*

De leerlingen ontwikkelen inzicht in eigenschappen van en relaties tussen getallen. Zo leren ze de tientallige structuur in ons talstelsel en denken na over bijvoorbeeld deelbaarheid en priemgetallen.



Vanuit deze basis breidt het getalbegrip van leerlingen zich uit naar grotere getallen, decimale getallen en breuken. Ook voor deze getallen geldt dat getallen aanvankelijk aan betekenisvolle contexten gekoppeld worden, zoals aan geld: € 1,28. Vervolgens wordt het getal losgekoppeld van de context (abstraheren) en wordt 1,28 een object waarmee gerekend kan worden. Ook daar waar breuken in eerste instantie aanduidingen zijn voor 'deel van een geheel', en resultaat van een deling, worden breuken ook getallen waarmee gerekend kan worden (rationale getallen).

Nog later breidt het getalbegrip van leerlingen zich uit met negatieve getallen en irrationele getallen (bijvoorbeeld  $n$  of  $\sqrt{2}$ ). Deze representatie met cijfers kan vervolgens aangevuld worden met andere representaties, bijvoorbeeld Romeinse cijfers, binaire getallen en wetenschappelijke notaties. Getallen kennen meer dan één representatie en lenen zich daarom voor verwerving van een bekwaamheid als **Representeren en communiceren**. Bijvoorbeeld: Welke representatie gebruik je in welke situatie?

### Getalbewerkingen

Een eerste begrip van getallen en hoeveelheden biedt de basis voor het leren rekenen. Bij het leren van de bewerkingen is het essentieel dat leerlingen niet alleen de eigenschappen van bewerkingen leren, maar deze ook in samenhang aangeboden krijgen. Het splitsen van getallen is voorwaardelijk voor het vlot kunnen uitvoeren van de bewerkingen optellen en aftrekken. De relaties tussen die bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) leren ze doorzien en gebruiken. Bijvoorbeeld de relatie tussen optellen en aftrekken of tussen vermenigvuldigen en delen, maar ook tussen bijvoorbeeld optellen en vermenigvuldigen en aftrekken en delen. Leerlingen leren de bijbehorende rekenen-wiskundetaal, verschillende rekenstrategieën en rekenprocedures zowel voor exact rekenen als voor schattend rekenen. Ze leren basisvaardigheden automatiseren (vlot uitvoeren) en in sommige gevallen te memoriseren (direct weten, zoals bijvoorbeeld de tafels van vermenigvuldiging). Ze kunnen met hun verworven kennis, inzicht en vaardigheden nieuwe, nog onbekende **problemen oplossen**, al dan niet ondersteund met schema's en plaatjes. Dat laatste kan als eerste kennismaking dienen met de bekwaamheid **Schematiseren en modelleren**. De getallen waarmee leerlingen rekenen worden steeds groter, en ze leren rekenen met decimale getallen en breuken.

Ook het aanbod van bewerkingen wordt uitgebreid met machtsverheffen, worteltrekken en logaritmen. Ook hier is het van belang dat leerlingen niet alleen de eigenschappen van deze bewerkingen leren, maar ook de relaties tussen die bewerkingen doorzien en gebruiken (bijvoorbeeld de relatie tussen machtsverheffen en worteltrekken en de voorrangsregels die gelden bij meerdere bewerkingen in een opgave). Berekeningen met getallen kunnen uitgevoerd worden door middel van standaardprocedures. Het beheersen daarvan is er één. Maar als een leerling gevraagd wordt te beschrijven hoe zo'n procedure in zijn werk gaat, ontwikkelt hij zijn **algoritmisch denk**vermogen. Bovendien lenen getallen zich om te leren **logisch te redeneren**. Een vraagstuk om aan te tonen dat het product van twee oneven getallen altijd oneven is, biedt gelegenheid om verschillende niveaus van redeneren toe te passen (een paar voorbeelden uitschrijven, een rechthoek tekenen en daarmee de bewering aantonen of  $(2n + 1)(2k + 1) = 4kn + 2n + 2k + 1 = \text{even getal} + 1 = \text{oneven getal}$ ).



Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen de grote opdracht 'Getallen en bewerkingen':

- Probleemoplossen
  - In de bus zitten voor de halte 28 mensen en na de halte 31 mensen. Er zijn 7 mensen ingestapt. Hoeveel mensen zijn er uitgestapt?
- Abstraheren
  - Leerlingen leren vanuit een verhaal of situatie een bewerking te formuleren; jonge leerlingen leren te praten over 'drie' zonder daarbij nog te denken aan een hoeveelheid.
- Logisch redeneren
  - De telrij of getallenrij is oneindig. Die rij ken je niet uit je hoofd. Hoe weet je toch altijd wat het volgende getal is? Leg eens uit.
- Representeren en communiceren
  - Welk getal staat hier:  $9,6 \times 10^7$ ? En hier: CIX?
- Schematiseren en modelleren
  - Een busrit begint met 4 passagiers. Gegeven is hoeveel passagiers op elke halte in- en uitstappen. Maak een schema waaruit je kunt afleiden hoeveel passagiers er op het einde van de busrit uitstappen.
- Algoritmisch denken
  - Leg stap voor stap hoe je een vermenigvuldiging als  $28 \times 67$  cijferend oplost.

### Brede vaardigheden

Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan bod:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren

### Grote opdracht 2 : Verhoudingen. *Alles verhoudt zich tot elkaar!*

#### Relevantie

Denken in en omgaan met verhoudingen speelt een belangrijke rol in ons leven. In het nieuws en via de politiek krijgen we berichten over allerlei verhoudingen: de balans privé/werk, de stijging van consumentenprijzen met 2%, de machtsbalans of de bevolkingssamenstelling. Ook in het persoonlijke leven en de beroepspraktijk gebruiken we veelvuldig verhoudingen. Bijvoorbeeld bij het in- en uitzoomen op je laptop, bij recepten, bij schoonmaakmiddeldoseringen en bij schaalmodellen die je met een 3D printer kunt maken. Verhoudingen zijn zo nabij en overal aanwezig dat een goed begrip ervan noodzakelijk is.

Als we met een wiskundige bril kijken zien we dat er bij verhoudingen steeds sprake is van twee of meer grootheden die ten opzichte van elkaar vergeleken worden. Verhoudingssituaties kunnen kwalitatief of schattend benaderd worden, zoals in de zin van: 'Mijn vader heeft grotere voeten dan ik, maar in verhouding heb ik grotere voeten dan hij', of kwantitatief zoals bij schaal of percentages. In het dagelijks gebruik is begrip van en vaardigheid in het omgaan met verhoudingssituaties volgens vaste of meer flexibele procedures van groot belang, bijvoorbeeld bij prijsvergelijkingen (Is de grote pot pindakaas in verhouding echt wel goedkoper dan de kleinere pot?). Digitale



technologie, bijvoorbeeld werken met spreadsheets, kan het oplossen van verhoudingsproblemen ondersteunen en vergemakkelijken. Grootheden in verhouding tot elkaar leren zien draagt bij aan de persoonsvorming en maatschappelijke redzaamheid, en aan een verdere wiskundige ontwikkeling.

Begrip van verhoudingen is ook belangrijk voor het kunnen rekenen met samengestelde grootheden (bijvoorbeeld snelheid in km/uur, dosering in ml/l), met vergrotingen binnen de meetkunde en bij kansen. Er is een sterke verbinding met de Grote Opdrachten: 'Meten en meetkunde' en 'Informatie, statistiek en kansrekening'. Ook in andere leergebieden en de beroepsvakken komen verhoudingen aan bod. Vanuit het faciliterende karakter van het leergebied Rekenen & Wiskunde voor andere leergebieden onderstrepen we hier wat in de visie beschreven is over een samenhangende aanpak: Toepassing van reken- en wiskundig instrumentarium op het gebied van verhoudingen kan het begrip van verhoudingen vergroten bij andere leergebieden.

### **Inhoud van de opdracht**

Bij deze GO 'Verhoudingen' gaat het enerzijds om het verwerven van begrip, kennis, en vaardigheden op het gebied van verhoudingen, anderzijds gaat het om het ontwikkelen van het vermogen op de volgende wiskundige bekwaamheden: Probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Schematiseren en modelleren. De bekwaamheid Algoritmisch denken past minder bij deze grote opdracht.

Jonge kinderen komen al vroeg met kwalitatieve verhoudingen in aanraking. Er kan gedacht worden aan uitdrukkingen als 'kleiner dan' en 'ouder dan' in verhouding tot iets anders. Als leerlingen dit fundament begrijpen, wordt de overstap gemaakt naar een kwantitatieve benadering. Bij een kwantitatieve benadering gaat het om getalsmatige verhoudingen. Dus niet meer 'hij is ouder dan ik ben', maar 'hij is twee keer zo oud als ik ben'. Contexten uit het dagelijks leven zoals het werken met recepten en de juiste hoeveelheid voer aan verschillende aantallen dieren ondersteunen het begrip van en rekenen met verhoudingen.

Het domein Verhoudingen leent zich goed om de bekwaamheden **Probleemoplossen** en **Logisch redeneren** te ontwikkelen. Veel situaties in het dagelijks leven rond verhoudingen vragen om niet routinematige aanpakken. Denk bijvoorbeeld aan prijsvergelijkingen met allerlei varianten zoals bijvoorbeeld aanbiedingen van verschillende abonnementen voor mobiele telefoons. Het gaat dan zowel om het berekenen van het goedkoopste abonnement als om het best passende abonnement, afhankelijk van het gebruik door de persoon in kwestie.

Een verhouding kent verschillende representaties, zoals een percentage, een breuk, een schrijfwijze als '1 van de 8' of een notatie als  $1 : 8$ . Welke het meest geëigend is in welke situatie en voor welke doelgroep is onderdeel van **Representeren en communiceren**.

Het is belangrijk dat breuken, procenten, verhoudingen en decimale getallen in samenhang worden aangeboden evenals het hanteren van een gemeenschappelijke taal voor het hele gebied van verhoudingen. Dit draagt ook bij aan **Abstraheren**.



Wiskundige inhoud:  
Verhoudingen



Bij het rekenen met verhoudingen is **Schematiseren en modelleren** een belangrijke bekwaamheid. Het gebruik van de strook, de dubbele getallenlijnen en verhoudingstabellen zijn hier voorbeelden van. Schematiseren en modelleren helpen bij het structureren van de wiskundige verhoudingsproblemen. De fase waarin een leerling zit, bepaalt of naast deze modellen ook een meer formele manier van rekenen nodig is, zoals rekenen met een verhoudingsfactor. Bij gebruik van de rekenmachine of Excel is deze factor van belang.

In het vo komen herhaalde procentberekeningen, exponentiële verbanden en evenredigheid aan de orde. Bij het vak economie leren leerlingen bijvoorbeeld rekenen met rente over rente (samengestelde interest).

Verhoudingen komen steeds aan bod in verschillende toepassingen van het vak, bijvoorbeeld bij het rekenen met samengestelde grootheden. Hierbij is ook de samenhang met andere leergebieden goed te zien. Ook speelt de verhouding een belangrijke rol in de meetkunde: het vergroten/verkleinen van figuren, rekenen met schaal, de guldensnede, goniometrie.

Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen de GO 'Verhoudingen':

- Probleemoplossen
  - De BTW is verhoogd van 6% naar 9%. Met hoeveel procent nemen de prijzen toe?
- Abstraheren
  - Op elke brildrager zijn er twee mensen die geen bril dragen. Welk deel van de mensen draagt geen bril?
- Logisch redeneren
  - Als je eerst iets verhoogt met 10% en daarna weer verlaagt met 10%, kom je dan weer op het oorspronkelijke bedrag uit? Leg je redenering uit.
  - Zowel in groep 7 als in groep 8 is 40% van de leerlingen een meisje. Mag je dan zeggen dat er in beide groepen evenveel meisjes zitten? Noem eens voorbeelden.
- Representeren en communiceren
  - Een Engelse landkaart heeft een schaal van 1 inch : 3 mijl. Hoe schrijf je dat in normale schrijfwijze?
- Schematiseren en modelleren
  - In de supermarkt zijn veel verschillende verpakkingen cola verkrijgbaar. Geef met behulp van verhoudingstabellen aan welke verpakking de hoogste literprijs heeft.

### Brede vaardigheden

Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan bod:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren

**Grote opdracht 3: Meten en meetkunde. Vormen en maten staan in de ruimte****Relevantie**

*Meten en meetkunde* komen we overal tegen in de wereld. Van de technische sector tot de creatieve industrie en van de zorg tot de agrarische sector. Maar ook in het persoonlijk leven. Al sinds de oudheid maken maten, ruimte, vormen en patronen deel uit van onze wereld, van knutselen en bouwen tot aan het begrijpen van de ruimtevaart. Het herkennen, verklaren en beschrijven van situaties in de ruimte om ons heen (routebeschrijvingen, dag en nacht) horen tot het domein van de meetkunde. Meten gaat over grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, temperatuur en tijd. Nieuwe (digitale) hulpmiddelen als de elektrische fiets, gezondheidsapps en virtual reality veranderen het handelen in het persoonlijk leven, de maatschappij, de studie en het beroep op het gebied van meten en meetkunde. Dit draagt bij aan de persoonsvorming.

Door met een wiskundige bril naar de wereld te kijken ontwikkelt de leerling een gevoel voor ruimte, grootte, omvang en plaats. Het domein *Meten en meetkunde* bevat contexten en onderdelen die de nieuwsgierigheid prikkelen en zo een onderzoekende houding uitlokken. De beschikbaarheid van (digitale) hulpmiddelen die het fysieke handelen uit handen kunnen nemen en/of tekeningen maken, geeft het zelf construeren en meten met wiskundige gereedschappen een andere functie. Denk bijvoorbeeld aan het meten van lengtes met behulp van een laser tot op de millimeter nauwkeurig in plaats van met bijvoorbeeld een rolmaat.

Ook al vermindert deze ontwikkeling de nadruk op het zelf kunnen uitvoeren, begrip van en vaardigheid in meten en het construeren van vormen en figuren volgens vaste of meer flexibele procedures blijft van groot belang voor verdere wiskundige ontwikkeling, voor maatschappelijke redzaamheid en (na)controle. En er verdwijnen eenheden verschijnen nieuwe eenheden. Oude eenheden als 'duim' en 'ons' hebben plaatsgemaakt voor de standaard-eenheden als 'meter' en 'kilogram'. Tegenwoordig gebruiken we ook nieuwe grootheden als filedruk, BMI en downloadsnelheid. In de toekomst zal kennis uit *Meten en meetkunde* in combinatie met andere onderdelen van het leergebied Rekenen & Wiskunde en andere leergebieden toegepast worden in nieuwe situaties. Denk aan zelfrijdende auto's, navigatiesystemen en het meten van de omvang van ijskappen.

Het domein Meten leent zich ook goed als context voor een verder begrip van het getalsysteem, met de tientallige structuur. Denk bijvoorbeeld aan de tientallige structuur van het metriek stelsel. Het goed benutten van de samenhang tussen de grote opdrachten 'Getallen en bewerkingen' en 'Meten en meetkunde' kan bijdragen aan een reductie van de leerstof.

**Inhoud van de opdracht**

Bij deze grote opdracht gaat het enerzijds om het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van meten en meetkunde, anderzijds gaat het om het ontwikkelen van het vermogen op de volgende wiskundige bekwaamheden: Probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Schematiseren en modelleren, Algoritmisch denken.

Metten gaat om het bepalen van grootte en omvang van grootheden, hetgeen de leerling tot uitdrukking brengt in maten. Het betreft dan de volgende grootheden: lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en tijd. Geld zou ook een maat genoemd kunnen worden, maar dat is zo minimaal dat we die hier buiten beschouwing laten.

Leerlingen maken kennis met verschillende maten en (digitale) meetinstrumenten, en in welke situaties die gebruikt worden. Een maat bestaat uit een combinatie van een maatgetal en een eenheid. Omdat eenheden in elkaar omgerekend kunnen worden, kent een maat verschillende **representaties**. Leerlingen leren deze kennen en begrijpen en in elkaar omrekenen. Ze ontwikkelen maatgevoel en verzamelen referentiematen (een grote stap is ongeveer een meter; een deur is ruim twee meter hoog). Bij het leren doorzien van het metriek stelsel en omrekenen van eenheden maken leerlingen gebruik van hun begrip van het tientallig stelsel.

Bij het onderwerp 'Tijd' verloopt dit anders. De klok en kalender passen niet in het tientallig stelsel. Tijd is ook een onderwerp waarbij leerlingen kunnen werken aan de bekwaamheid **Representeren en communiceren**. Denk bijvoorbeeld aan het omgaan met kalenders, agenda's en hoe je met elkaar afstemt bij het maken van afspraken of het maken van een reis.



Meetkunde beschrijft en verklaart vorm en ruimte. Dit gebeurt zowel in twee als in drie dimensies.

Daarnaast is er overlap tussen meten en meetkunde. Het bepalen van de hoogte van een huis is meten, het maken van een zijaanzicht is meetkunde. Het tekenen vanuit verschillende perspectieven (plattegronden, zijaanzichten) draagt bij aan de ontwikkeling van de bekwaamheid

**Schematiseren en modelleren**. De opbouw gaat van herkennen en benoemen van vormen, het indelen van vormen zoals driehoeken, vierkanten en rechthoeken naar het definiëren van deze vormen. Leerlingen leren hierbij **abstraheren**. Daarnaast leert de leerling ermee redeneren en rekenen. Bijvoorbeeld bij het berekenen van de oppervlakte van een vlak figuur. Of het berekenen van de

inhoud van samengestelde figuren met behulp van formules (de inhoud van een huis = de inhoud van een balk + inhoud van een prisma). Meten en meetkunde lenen zich ook goed om de bekwaamheden **Probleemoplossen** en **Logisch redeneren** te ontwikkelen: Wat is de grootste oppervlakte die je kunt maken met een omtrek van 60 m<sup>2</sup> en hoe weet je dat dit de grootste oppervlakte is? Logisch redeneren in de meetkunde kan variëren van het gebruik van een schetsje tot een formeel wiskundig bewijs, denk bijvoorbeeld aan het werken met kijklijnen. **Algoritmisch denken** kan in de meetkunde aan bod komen bij het beschrijven van de wijze waarop een meetkundige constructie met passer en liniaal uitgevoerd wordt.

Sommige leerlingen, afhankelijk van het uitstroomperspectief, werken aan analytische meetkunde en vectormetkunde (zowel twee- als driedimensionaal), bij andere uitstroomprofielen ligt de nadruk op functioneel gebruik in de dagelijkse (beroeps-)praktijk. Denk aan de bouw, koken, reizen.

Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen de GO 'Meten en meetkunde' zijn:

- Probleemoplossen
  - Hoeveel blikken van 2 liter verf heb je nodig om een muur van 8 bij 3,2 meter te verven?
- Abstraheren
  - Leg uit dat als de lengte en breedte van een rechthoek verdubbelen, de oppervlakte van die rechthoek vier keer zo groot wordt.
- Logisch redeneren
  - Leg uit dat elk vierkant ook een rechthoek is.
- Representeren en communiceren





- Teken de route die we gelopen hebben op [www.afstandmeten.nl](http://www.afstandmeten.nl).
- Ontwerp op [www.afstandmeten.nl](http://www.afstandmeten.nl) een fietsroute van ongeveer 50 km waarbij we ook weer terugkomen op het punt van vertrek.
- De luchtdruk in een fietsband is 80 pounds per square inch. Hoeveel atmosfeer is dat?
- Schematiseren en modelleren
  - Maak een bouwtekening (op schaal) van het konijnenhok dat je gaat maken met je groep.
- Algoritmisch denken
  - Beschrijf hoe je met passer en liniaal het midden van twee gegeven punten kunt bepalen.

### Brede vaardigheden

Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan bod:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren

### Grote opdracht 4: Verbanden en formules. *Verbanden beschrijven relaties*

#### Relevantie

In de huidige samenleving is het belangrijk dat mensen snel op de hoogte kunnen zijn van allerlei zaken en gebeurtenissen in de wereld, bijvoorbeeld bij rampen. Door de informatie te ordenen en te vertalen in bijvoorbeeld grafieken kunnen we gebeurtenissen beter begrijpen, verbanden leggen en een ontwikkeling voorspellen. De technologie hierbij ontwikkelt zich in een rap tempo. Ontwikkelingen op het gebied van bijvoorbeeld mobiele telefonie, duurzame energie, domotica (huisautomatisering) en de beurshandel zorgen voor veel verschillende informatiestromen die niet altijd overzichtelijk of te controleren zijn. Denk bijvoorbeeld ook aan misleidende grafieken die een vertekend beeld schetsen omdat er een deel van de informatie niet zichtbaar is.

Als we met een wiskundige bril naar de wereld kijken, zien we in informatie allerlei verbanden. Denk bijvoorbeeld aan het verband tussen het aantal bananen en het gewicht, tussen de tijd en de afgelegde afstand of tussen het aantal mensen waaronder de kosten verdeeld moeten worden met het te betalen bedrag. Het gaat steeds om twee (of meer) grootheden (die verschillende waarden kunnen hebben) die met elkaar samenhangen. Wanneer bijvoorbeeld de kosten over meer mensen verdeeld worden, neemt het te betalen bedrag per persoon af.

Bij het omzetten van informatie naar verbanden en formules spelen schematische voorstellingen en modellen al van oudsher een grote rol. Wiskunde is betekenisvol omdat het van belang is dat leerlingen leren met gegevens om te gaan, verbanden leren zien en deze weer te geven in een formule met variabelen. Denk bijvoorbeeld aan een (woord-)formule die de totaalkosten van een concertbezoek weergeeft met een prijs per kaartje van € 25,- en daar bovenop de administratiekosten van € 10,-. De woordformule wordt dan: *totale kosten kaartjes = aantal kaartjes x € 25 + € 10*. Formules zijn een wiskundige weergave van verbanden. Zij vormen een universele taal

die de communicatie wereldwijd vergemakkelijkt.

Bij het ontdekken van patronen, voor het leggen van verbanden en het opstellen van formules is een goed fundament van getalbegrip essentieel. Bij het leggen van verbanden spelen verhoudingen vaak een grote rol. Ook het kunnen interpreteren van schematische weergaves is hierbij noodzakelijk. Daarmee is er een sterke samenhang met de Grote Opdrachten *Getallen en Bewerkingen, Verhoudingen, Meten en Meetkunde* en *Veranderingen en benaderingen*. Ook in de leergebieden Mens & Natuur en Mens & Maatschappij wordt veelvuldig gewerkt met verbanden en formules. Deze grote opdracht *Verbanden en formules* leent zich voor uitwisseling tussen leergebieden en voor samenvoeging van leerstof.

### Inhoud van de opdracht

Bij deze GO '*Verbanden en formules*' gaat het enerzijds om het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van verbanden en formules en anderzijds om het ontwikkelen van het vermogen op de volgende wiskundige bekwaamheden: Probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Schematiseren en modelleren, Algoritmisch denken.

Leerlingen zijn al vroeg bezig met het concept verbanden door een patroon te zoeken in geordende rijen getallen en dit patroon voort te zetten en te verwoorden. Dit doen ze eerst door verder te tellen. Bij bepaalde situaties kun je niet blijven tellen om tot een oplossing te komen zoals bij: Hoeveel handen hebben alle kinderen van de hele school samen? Bij grotere aantallen ontstaat de noodzaak om een patroon te herkennen en dit patroon om te zetten in een (woord)formule, zoals:  $\text{aantal handen} = \text{aantal kinderen} \times 2$ . Deze woordformule is dan weer in te zetten bij de vraag: Hoe



kunnen we dan beschrijven hoeveel vingers er zijn? Een formule beschrijft volgens welke rekenstappen de waarde van een variabele berekend kan worden als die van de andere variabele bekend is, waardoor een formule dus opgevat kan worden als een **algoritme**. De variabelen in een formule kunnen worden weergegeven door middel van een woord, een betekenisvolle letter (bijvoorbeeld de  $h$  van handen) of een willekeurige letter ( $y$ ).

Een formule is een middel om efficiënter met complexere situaties om te kunnen gaan, zoals het gebruik van de abc-formule bij het oplossen van een tweedegraadsvergelijking. Bij het omzetten van een complexe situatie in een (woord)formule, wordt de wiskundige bekwaamheid **Schematiseren en modelleren** verder ontwikkeld.

Leerlingen leren dat de plaats van een getal in een (woord)formule bepalend is voor de betekenis van het getal. Het gaat hierbij om het duiden van een formule.

Voorbeeld: Wanneer je met oppassen per uur 3 euro verdient en een vast bedrag van 5 euro per keer, moet de 3 gekoppeld worden aan de variabele 'aantal uren' om uiteindelijk een correct eindbedrag te krijgen. Ook bij de formule  $y = ax + b$  leert de leerling de betekenis en invloed van  $a$  en  $b$  om  $y$  te beschrijven, waardoor formules uiteindelijk makkelijker te interpreteren worden.

Later wordt het onderwerp Verbanden verder uitgebouwd. De leerling leert zelf verbanden te beschrijven met behulp van (woord-)variabelen. Afhankelijk van het uitstroomperspectief gebeurt dit binnen contexten ( $\text{loon} = \text{uurloon} \times \text{aantal gewerkte uren}$ ) en/of binnen de wiskunde ( $y = x^2 + 5$ ). Aan bod komen vooral het herleiden van



formules, oplossen van verschillende soorten vergelijkingen met verschillende methoden en standaardverbanden en varianten daarop. Van standaardverbanden leren leerlingen verschillende **representaties**, zoals (de vorm) van formules en van grafieken. Hiervan zijn tabellen en grafieken passend voor **communicatie** met het grote publiek, eventueel met behulp van digitale hulpmiddelen. Bij het oplossen van vergelijkingen en het representeren van verbanden kunnen digitale hulpmiddelen worden ingezet.

Verbanden en formules bieden ruim gelegenheid tot **abstraheren**, zoals bij formules: in het denken van een leerling evolueert een formule van een rekenvoorschrift tot een object waarover geredeneerd kan worden (Hoe kun je aan de formule zien dat  $Y$  kwadratisch toeneemt bij een verandering van  $X$ ?) of waarmee **probleemoplossen** mogelijk is (Bij welke omzet is er sprake van maximale winst?).

Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen deze grote opdracht:

- Probleemoplossen
  - Leerlingen bedenken reeksen getallen. Andere leerlingen moeten de reeksen getallen afmaken en kunnen uitleggen welk patroon er te zien is.
- Abstraheren
  - Van welk van de volgende verbanden lopen de grafieken evenwijdig? Beantwoord deze vraag zonder de grafieken te tekenen.  $y = 2x + 3$ ,  $y = -2x + 3$ ,  $y = 2x - 3$  en  $y = -2x - 3$ .
- Logisch redeneren
  - Als je het aantal handen weet, weet je dan ook hoeveel kinderen er zijn? Leg eens uit.
- Representeren en communiceren
  - Teken een machientje waarbij je het verband weergeeft tussen het aantal consumpties en het totaalbedrag.
- Schematiseren en modelleren
  - In elk boeket zit 4 euro aan groen, de rozen kosten 1,50 euro per stuk en de gerbera's 1 euro per stuk. Maak een formule voor het totaalbedrag per boeket .
- Algoritmisch denken
  - Beschrijf de stappen die je moet doen om een lineaire vergelijking op te lossen.

### Brede vaardigheden

Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan bod:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren

### Grote opdracht 5: Informatie, statistiek en kansrekening. *Hoe getallen spreken*

#### Relevantie

Zijn alle berichten die met getallen onderbouwd worden, waar? Hoe weet je dat? De tegenwoordige rekenkracht van computers maakt het mogelijk om sneller,



eenvoudiger en met minder kans op fouten zeer grote hoeveelheden gegevens te verwerken. Het vermogen van burgers om gegevens te ordenen en te verwerken en representaties te begrijpen is dan ook van steeds groter belang. Statistiek gaat over het verzamelen, verwerken, juist interpreteren en representeren van gegevens en er conclusies aan verbinden. Om greep te krijgen op onzekerheid en toeval is er de kansrekening. Hiermee kunnen we bepalen welke uitkomsten mogelijk zijn en hoe waarschijnlijk uitkomsten zijn.

Door via een wiskundige bril te kijken, leren leerlingen kritisch te reflecteren op informatie. Deze reflectie stimuleert een onderzoekende houding en versterkt de nieuwsgierigheid van leerlingen. Met deze houding neemt hun bewustzijn van de wereld om hen heen toe. De beschikbaarheid van steeds meer en diverse informatie, verandert ook het maken van afwegingen. Daarom is begrip van en vaardigheid in het omgaan met gegevens volgens vaste of meer flexibele procedures van groot belang. Met de groei van de omvang van informatie, groeien ook de verwachtingen over wat we ermee kunnen. Maar informatie komt niet altijd overeen met de werkelijkheid. Bewust leren omgaan met (een grote hoeveelheid) talige en cijfermatige informatie of representaties zorgt ervoor dat informatie op de juiste waarde geschat kan worden. Deze vaardigheid is voor leerlingen in alle leergebieden, bij (vervolg)opleidingen, in het werkveld en het dagelijks leven van groot belang. In de toekomst zal meer kennis hierover toegepast worden in nieuwe situaties. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de journalistiek, voorspellingen rondom het klimaat en het verwerken van data op velerlei terreinen.

### Inhoud van de opdracht

Bij de GO *'Informatie statistiek en kansrekening'* gaat het enerzijds om het verwerven



van kennis, inzicht en vaardigheden en anderzijds om het ontwikkelen van de volgende wiskundige bekwaamheden: Probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Schematiseren en modelleren.

Leerlingen leren al op vroege leeftijd gegevens te ordenen tot overzichtelijke hoeveelheden, bijvoorbeeld als ze bespreken welk dier ze op 4 oktober in de klas willen hebben: Iedereen legt een plaatje van zijn voorkeur in de juiste rij en zo ontstaat een eenvoudig beelddiagram dat ze zelf kunnen interpreteren. Later leren ze hoe ze gegevens op papier kunnen verwerken tot bijvoorbeeld een staafdiagram. Het maken van schematische weergaven gebeurt niet alleen handmatig, maar ook met inzet van

ICT. Dit is een uiting van de bekwaamheid **Representeren en communiceren**. Met behulp van deze representaties leren leerlingen kritisch denken en redeneren over deze gegevens: 'Welk dier zouden we nu moeten uitnodigen en waarom denk je dat?' Leerlingen leren meerdere visualisaties te maken om informatie geordend weer te geven, onder andere tabellen, diagrammen en grafieken. Hieruit kunnen ze gegevens aflezen en analyseren. Daarna conclusies trekken, trends herkennen en voorspellingen doen. Voorbeeld: Maak een staafdiagram van de schoenmaten van alle kinderen uit je groep. Welke schoenmaat komt het meest voor? Hoe ziet een staafdiagram hiervan er over twee jaar uit? Leerlingen leren ook dat gegevens soms uit toeval kunnen zijn ontstaan en dat ze daar dus bij het interpreteren en trekken van conclusies rekening mee moeten houden: Als je een verkeerstelling houdt bij de straat van je school en er zijn heel veel fietsers geteld, kan dat bijvoorbeeld toeval zijn (doordat er een schoolklas langs kwam fietsen). Kritisch denken en conclusies trekken gaan hierbij hand in hand.



Bij sommige uitstroomperspectieven komt het exploreren (onderzoeken en interpreteren) van informatiebronnen aan bod, bijvoorbeeld bij misleidende grafieken. Leerlingen leren dat ze misleidende grafieken kunnen herkennen bijvoorbeeld doordat er gemanipuleerd is met de indeling van de assen.

De Grote Opdracht '*Getallen en bewerkingen*' vormt een belangrijke basis om getalsmatige informatie te verzamelen, visualisaties te maken en te kunnen begrijpen. Door steeds complexere informatie en grotere getallen te gebruiken, maar ook door grotere verzamelingen in combinatie met statistiek toe te passen, bereiken de leerlingen een hogere mate van **abstract denken**. Dit gaat van het maken van een staafdiagram over de hoeveelheid regen die er gevallen is per dag tot het **logisch redeneren** over een bevolkingspiramide. (Als de hoeveelheid geboortes afneemt en mensen ouder worden, hoe ziet de bevolkingspiramide er over 50 jaar uit?)

De leerling leert om de grote hoeveelheid talige en cijfermatige informatie kritisch te bekijken en op waarde in te schatten. In eerste instantie op basis van eigen waarneming. Daarna door met logische opeenvolgende redeneerstappen een bewering aan te tonen of te weerleggen. Nog later kan dat met beweringen op een hoger abstractieniveau.

De leerling leert na te denken over kans, zoals de kans op regen en of een bepaald spelletje eerlijk is of niet. Nadien volgt een meer formele aanpak van kansrekening. Kansrekening biedt talrijke vraagstukken die uitnodigen tot **probleemoplossen**, zoals het driedeurenprobleem (Stel dat je mag kiezen uit drie deuren: achter een van deur staat een auto, achter de andere twee staan geiten. Je kiest een deur, bijvoorbeeld nr. 1, en de presentator, die weet wat er achter de deuren staat, opent een andere deur, bijvoorbeeld nr. 3, met een geit erachter. Hij zegt dan tegen je: 'Zou je deur nr. 2 willen kiezen?' Is het in je voordeel om van deur te wisselen?)

Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen de GO *Informatie, statistiek en kansrekening*:

- Probleemoplossen
  - Je rapportcijfer is gelijk aan het gemiddelde van drie proefwerkcijfers. Je hebt op het eerste proefwerk een 4 en op het tweede proefwerk een 6 gehaald. Welk cijfer moet je ten minste op het derde proefwerk halen om op je rapport een 5,5 of hoger te krijgen?
  - Je doet met een vriend een spelletje en gooit een keer of wat met een dobbelsteen. Als er een 2 of een 5 gegooid wordt, krijg jij van je vriend € 0,50. Als er iets anders gegooid, betaal jij je vriend € 0,20. Wie houdt er naar verwachting geld over aan dit spelletje?
- Abstraheren
  - Als in een dataset alle getallen met een vaste waarde verhoogd worden, verandert dan het gemiddelde, de spreiding of beide?
- Logisch redeneren
  - Beredeneer dat jouw oma (waarschijnlijk) een grotere kans heeft om 100 jaar oud te worden dan jij.
- Representeren en communiceren
  - Maak een staafdiagram van de cijfers in de klas van de laatste rekentoets.
- Schematiseren en modelleren
  - Veel kansexperimenten kun je met de normale verdeling goed modelleren: Bijvoorbeeld de kansverdeling van de som van de ogen van een aantal dobbelstenen.

### Brede vaardigheden



Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan de orde:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren

### **Grote opdracht 6: Veranderingen en benaderingen. *Alles verandert!***

#### **Relevantie**

We hebben in de wereld te maken met verschillende nieuwe maatschappelijke ontwikkelingen zoals een veranderend klimaat en daardoor het smelten van de ijskap, de toenemende afvalberg en afnemende fossiele brandstoffen. Om veranderprocessen te begrijpen is kennis nodig van veranderingen. In de wetenschap worden veranderingsprocessen vaak gemodelleerd. Als je het startpunt van een proces weet en de richting en grootte van de verandering, dan kan geprobeerd worden om de toekomstige situatie te benaderen zodat we erop kunnen anticiperen. Denk bijvoorbeeld aan 'code rood' bij een stormwaarschuwing.

Vanuit een praktisch perspectief zien we dat benaderingen van steeds grotere waarde worden dan exacte uitkomsten. Door de toenemende rekenkracht van computers liggen de technieken van de numerieke wiskunde (het onderdeel van de wiskunde dat zich bezig houdt met benaderend rekenen) voor het benaderen van uitkomsten met een zeer hoge nauwkeurigheid binnen handbereik. Door toepassing van numerieke wiskunde zijn computersimulaties mogelijk bij praktische vragen en complexe problemen als weersvoorspellingen en stromingsleer. Kennis van numerieke wiskunde is nodig om digitale hulpmiddelen goed te hanteren en te begrijpen, denk hierbij vooral ook aan het effect van (tussentijdse) afrondingen.

Alle leergebieden hebben te maken met veranderingen. Of het nu gaat om cultuur, politieke veranderingen, migratie, (cyber)oorlog of het omgaan met elkaar, persoonlijk of via de social media. Er zijn wiskundige technieken beschikbaar die veranderingen beschrijven en soms ook kunnen voorspellen. Kennis van deze technieken is voor leerlingen in alle leergebieden, bij (vervolg)opleidingen, in het werkveld en het dagelijks leven van groot belang. In de toekomst zal er meer kennis over menselijk gedrag in de (digitale) samenleving toegepast worden, bijvoorbeeld in het huishouden, de zorg (robotisering), de landbouw en bij digitale platforms.

#### **Inhoud van de opdracht**

Bij deze grote opdracht 'Veranderingen en benaderingen' gaat het enerzijds om het verwerven van kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van veranderingen en benaderingen en anderzijds om het ontwikkelen van het vermogen op de volgende wiskundige bekwaamheden: Probleemoplossen, Abstraheren, Logisch redeneren, Representeren en communiceren, Schematiseren en modelleren en Algoritmisch denken.

Een belangrijk fundament voor het kunnen werken aan deze grote opdracht ligt in andere grote opdrachten waarbij leerlingen leren werken met (hele) kleine getallen, gemiddelden, verhoudingen, formules, tabellen en grafieken.



In eerste instantie leert de leerling een model of visualisatie, zoals een grafiek of een tabel, te interpreteren en vast te stellen welke verandering zichtbaar is. De leerling kan kritisch denken en redeneren over deze verandering. Bijvoorbeeld: 'Wat betekent het als de lijn op een bepaald punt in een tijd-afstand lijngrafiek heel steil loopt?'. Hierbij is een leerling ook bezig met de bekwaamheid Logisch redeneren: 'Wat gebeurt er met het verloop van de grafiek als de temperatuur daalt? Leg je antwoord uit.'

Vervolgens leert de leerling werken met verschillen op intervallen die steeds kleiner worden, zowel discreet (stapjes per eenheid) als continu. Bijvoorbeeld: 'Op welk moment van de dag daalt de temperatuur het snelst?'. Door steeds kleinere intervallen te bekijken, die niet meer realistisch en voorstelbaar zijn, is de leerling bezig met de wiskundige bekwaamheid **Abstraheren**.

In een later stadium leert de leerling een model te maken om een verandering te visualiseren, ermee te rekenen en onderzoek te doen. Hiermee wordt een beroep gedaan op de wiskundige bekwaamheid **Schematiseren en modelleren**. Daarvoor zijn wiskundige technieken als interpoleren (wanneer denk je dat Nederland ongeveer 8 miljoen inwoners had?) en extrapoleren (wanneer denk je dat Nederland zo'n 20 miljoen inwoners zal hebben?) belangrijke vaardigheden.

Deze grote opdracht leent zich goed voor de wiskundige bekwaamheid

**Probleemoplossen**. Het kiezen van een zo goedkoop mogelijk telefoonabonnement bij een veranderend verbruik van de hoeveelheid MB's is een voorbeeld hiervan. Ook optimalisatieproblemen als 'wat is de oppervlakte van de grootste rechthoek die je kunt maken met 30 meter prikkeldraad?' vallen onder deze wiskundige bekwaamheid.

Wiskundige technieken om veranderingen te leren begrijpen zijn: benaderen, inklemmen (bijvoorbeeld de zijde van een vierkant van 20 m<sup>2</sup> bepalen door middel van proberen: eerst 5, dan 4, dan 4,4, dan 4,45, enzovoort), differentiaalrekenen, optimaliseren en lineair programmeren. Deze technieken kunnen in de vorm van een of meer algoritmen weergegeven worden. Bij het begrijpen en toepassen van deze technieken wordt een beroep gedaan op de wiskundige bekwaamheid algoritmisch denken. **Algoritmisch denken** komt vooral sterk aan de orde bij numerieke wiskunde. Dit onderdeel bevat een groot aantal benaderingsprocedures die zich goed lenen om door middel van algoritmen beschreven te worden.

Bij deze grote opdracht wordt ook een beroep gedaan op de bekwaamheid

**Representeren en communiceren**: Veranderingen worden immers vaak visueel gepresenteerd in grafieken, diagrammen en tabellen.

Voorbeelden van bekwaamheden in vraagstukken binnen deze grote opdracht:

- Probleemoplossen
  - In een staafdiagram staat hoeveel regen er elke dag gevallen is. Bepaal hoeveel regen er in totaal gevallen is.
- Abstraheren
  - Leg uit hoe je in een staafdiagram kunt zien waar zich de grootste verandering voordoet.
  - Gegeven is een grafiek die de plaats van een object weergeeft op een bepaald tijdstip. Wijs het punt op de grafiek aan waar de snelheid van het object gelijk is aan de gemiddelde snelheid vanaf  $t = 0$ .
- Logisch redeneren



- Wat gebeurt er met de lengte van je remweg als je harder gaat rijden en vervolgens remt? Leg eens uit.
- Leg Zeno's paradox uit: waarom haalt Achilles de schildpad uiteindelijk toch in?
- Representeren en communiceren
  - Laat in een grafiek zien hoe de ontwikkeling van een hoeveelheid bacteriën er uit ziet. Je start met 1 bacterie en deze splitst zich elk uur in tweeën.
  - Voor differentiaalquotient en afgeleide functie bestaan verschillende representaties, zoals  $dy/dx$ ,  $y'$  en  $\dot{y}$ .
- Schematiseren en modelleren
  - Modellen uit de economie voor het berekenen van de totale opbrengst:  $TO = -3q^2 + 45q$  met  $q =$  aantal producten. Wat is de marginale opbrengst voor  $q = 3$ ?
- Algoritmisch denken
  - Beschrijf de stappen om de oplossing van een vergelijking met behulp van inklemmen te vinden.

### Brede vaardigheden

Bij bovenstaande bekwaamheden komen ook de volgende brede vaardigheden aan bod:

- Kritisch denken
- Creatief denken en praktisch handelen
- Probleemoplossend denken
- Zelfregulering
- Communiceren





## BIJLAGE 1A: BESCHRIJVING BEKWAAMHEDEN

### *Probleemoplossen*

Een probleem is een taak of opdracht met één of meer oplossingen. Een probleem onderscheidt zich van een routinetaak door dat de oplosser moet nadenken met behulp van welke reken-/wiskundige (routine)handelingen in welke volgorde een oplossing gevonden moet worden. Over hoe een routinetaak uitgevoerd moet worden, hoeft niet nagedacht te worden.

### *Logisch redeneren*

Een logische redenering bestaat uit redeneerstappen aan de hand waarvan een bewering gestaafd of weerlegd kan worden of plausibel gemaakt kan worden. De redeneerstappen kunnen logisch van karakter zijn ('Uit A volgt B'), maar ook van statistische aard zijn ('De kans dat dit klopt is 95%').

### *Abstraheren*

Iemand die in staat is te abstraheren kan denken in termen van reken- en wiskundige objecten zoals getal, verhouding, breuk, driehoek en kans zonder dat er sprake is van een concrete situatie. Hij kan uit soortgelijke concrete situaties het gemeenschappelijke generaliseren tot reken- en wiskundige objecten. Hij kan redeneren over en met reken- en wiskundige objecten.

N.B. Abstraheren in andere leergebieden heeft vaak betrekking op het weglaten van details, bijvoorbeeld bij een landkaart, abstracte kunst of bij een ontwerp-tekening. Bij Rekenen en Wiskunde valt deze interpretatie van abstraheren onder *Schematiseren en modelleren*.

### *Representeren en communiceren*

Een representatie is een weergave van een reken- en wiskundig object, bijvoorbeeld: de schrijfwijze van grote getallen in cijfers, maar ook met 'miljoen' en 'miljard' of de schrijfwijze van een deling met  $\div$  of  $/$ . Ook naamgeving wordt tot de representatie van een wiskundig object gerekend. Een reken- en wiskundig object kan verder ook gerepresenteerd worden in beeld, zoals de weergave van een getal als een punt op de getallenlijn en de weergave van een verband tussen twee grootheden in de vorm van een grafiek.

Wiskundig communiceren is een verslag doen van een oplossingswijze, redenering, ... aan een doelgroep, meestal met gebruikmaking van representaties van objecten én daarover met de doelgroep in gesprek gaan.

### *Schematiseren en modelleren*

Een schema is een weergave van een bepaalde situatie waarin de reken- en wiskundige essentie van de situatie weergegeven wordt. Een wiskundig model is een weergave van een situatie met gebruikmaking van wiskundige formalismen. Wiskundige formalismen zijn onder andere formules en vergelijkingen, maar een getallenlijn kan in zekere zin ook als een wiskundig formalisme beschouwd worden. Bijvoorbeeld: een in- en uitstapschema van een bus die verschillende haltes aandoet, is geen wiskundig model, want hij bevat geen wiskundige formalismen. Een formule die een patroon van getallen beschrijft, is wel een voorbeeld van een wiskundig model.

N.B. 1 Naast wiskundige modellen kunnen ook denkmodellen onderscheiden worden. Een denkmodel is een hulpmiddel om bewerkingen uit te kunnen voeren, bijvoorbeeld: een strook bij procentberekeningen, een rechthoekmodel bij vermenigvuldigingen of een taartmodel bij het rekenen met breuken. Deze denkmodellen beschouwen we meer als



schema dan als wiskundige model.

N.B. 2 Andere leergebieden kennen ook modellen. Denk aan modellen voor atomen, voor licht of voor prijsvorming op een markt met veel producenten. Aan de hand van deze modellen kunnen verschijnselen worden verklaard en in kwalitatieve zin voorspellingen gedaan wordt. Dergelijke modellen worden conceptuele modellen genoemd en zijn geen wiskundige modellen.

#### *Algoritmisch denken*

Een algoritme is een stappenplan dat een reken- en wiskundeprocedure of een oplossingsstrategie voor een probleem beschrijft. Een algoritme kunnen uitvoeren is een basisvaardigheid. Een algoritme opstellen voor een procedure of voor de oplossingsstrategie voor problemen van een bepaald type valt daarentegen onder algoritmisch denken. Ook het vergelijken en beoordelen van algoritmen is onderdeel van algoritmisch denken.



**BIJLAGE 1B: BEGRIPPENLIJST**

Abstraheren	Het uit probleemsituaties isoleren van specifieke overeenkomsten en verschillen, zodat deze als nieuwe, opzichzelfstaande entiteiten kunnen worden onderzocht
Automatiseren	Het vrijwel routinematig uitvoeren van rekenhandelingen
Begripsvorming	Het verwerven van inzicht met betrekking tot een concept
Bekwaamheden	Domeinonafhankelijke reken- en wiskundevermogens van een leerling Beheersing van routinevaardigheden en van domeinonafhankelijke vaardigheden als probleemoplossen en redeneren maken deel uit van bekwaamheden
Complexe getallen	Een complex getal wordt weergegeven wordt als $a + b \cdot i$ waarbij $i^2 = -1$ .
Complexiteit	Hoe moeilijk een reken-/wiskundige taak is die leerlingen moeten (kunnen) uitvoeren
Concept	Een reken- en/of wiskundig begripselement, zoals getal, verhouding en verandering, dat in het hoofd van een leerling deel uit maakt van een mentaal netwerk
Construeren	Een figuur vervaardigen met behulp van niet meer dan een rechte liniaal, een passer en schrijfgerei
Context	Een betekenisvolle situatie waarbinnen rekenen en wiskunde kan worden toegepast of waarbinnen rekenen en wiskunde kan worden geleerd
Denkniveau Handelingsniveau	Geeft weer in welke mate een bekwaamheid in leerlinggedrag zichtbaar is of moet zijn
Diagram	Een schematische, grafische weergave van een proces of van een aantal grootheden en hun onderlinge verband
Domein	Een samenhangende verzameling inhouden
Examenprofiel	Natuur & techniek, natuur & gezondheid, economie & maatschappij en cultuur & maatschappij in havo en vwo Tien beroepsgerichte profielen in het vmbo
Formeel rekenen	Rekenen dat als voorkennis voor wiskunde dient
Functioneel rekenen	Rekenen dat dient om situaties uit de praktijk het hoofd te bieden
Gecijferdheid	Gecijferdheid bestaat uit de verbinding van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten, nodig om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen
Gegevens of data	Onbewerkte letters, cijfers en andere of andersoortige symbolen die voor iemand geen betekenis hebben
Grafiek	Een visuele presentatie van een hoeveelheid gegevens waarbij de relatie tussen die gegevens zichtbaar is gemaakt
Herleiden	Een formule of vergelijking in een eenvoudigere vorm uitdrukken
Informatie	Al dan niet bewerkte gegevens die voor iemand betekenis hebben en die bijdragen aan diens kennis ergens van
Inhoud	Onderwerpen uit het leergebied Rekenen & Wiskunde die deel uit maken van een curriculum



Leerlijn	Een beredeneerde opeenvolging van leerdoelen en inhouden die leidt tot een bepaald einddoel
Leerstof	Wat er door leerlingen te leren valt. Bestaat uit inhoud en bekwaamheden
Leerweg	Basisberoepsgerichte, kaderberoepsgerichte, gemengde en theoretische leerweg in het vmbo
Memoriseren	Het uit het hoofd leren (inprenten) en kunnen reproduceren van rekenfeiten, zoals optellingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging.
Onderwijssector	Primair onderwijs, (voortgezet) speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs, vmbo, havo, vwo
Ontwikkelingslijn	Volgens welke route een leerling leert of geleerd heeft
Som	Wat je krijgt als je twee getallen (termen) optelt
Rekenen & wiskunde	Verzamelnaam voor alle vakken en leerdomeinen met rekenen en/of wiskunde in hun naam in alle sectoren. Tevens naam van het ontwikkelteam
Toepassing	Gebruik van kennis, inzicht en vaardigheden om een probleem in een bepaalde praktijksituatie op te lossen.
Uitstroomperspectief	Een perspectief voor leerlingen op uitstroom in een sector in het voortgezet onderwijs
Wiskundevariant	Wiskunde A, B, C en D

**BIJLAGE 2: GERAADPLEEGDE BRONNEN**

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Boswinkel, N., & Schram, E. (2012). *De Toekomst Telt*. Enschede: SLO.

Charles, R. I. (2005). Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. *NCSM Journal of Mathematics Education Leadership*, 7(3), 9-24.

Deloitte. (2014). *Mathematical sciences and their value for the Dutch economy*. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: D.C Heat & Co.

Drijvers, P, Streun, A. van, & Zwaneveld, L, (2016) *Handboek wiskundedidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

Eerde, H.A.A. van (2009). Rekenen-wiskunde en taal: een didactisch duo. *Panama-Post - Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 28 (3), (pp. 19-32) (14 p.).

European Commission. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brussel: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency

Eves, H. (1969). *An introduction to the history of mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen. (2008). *Over de drempels met rekenen*. Enschede: SLO.

Feskens, R., Kuhlemeier, H., & Limpens, G. (2016). *Resultaten PISA-2015*. Arnhem: Cito.

Folmer, E., Koopmans - van Noorel, A, & Kuiper, W. (Red.). (2017). *Curriculumspiegel 2017*. Enschede: SLO.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gilmore, C., Göbel, S.M., & Inglis, M. (2018). *An introduction to mathematical cognition* Oxford: Routledge.

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. *Freudenthal*, 100, pp. 106-113.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C. et al.(2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education*. 15(Suppl 1): 105. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>



Gravemeijer, K. P. (2016). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw: Zet vooral in op kennis die een aanvulling is op wat de computer al kan. *Tijdschrift voor remedial teaching*, 24(3), 20-22.

Gijzen, W., Buter, A., Hereijgens, C., & Weessies, H. (2015). *Over de grenzen van de referentieniveaus - een versneld aanbod in de hele basisschool*. Rotterdam: Wijnand Gijzen Onderwijsadvies.

Hirsch, E.D. (2016). *Why knowledge matters. Rescuing our children from failed educational theories*. Cambridge MS: Harvard Education Press.

Hoeven, M. van der, Schmidt, V., Sijbers, J., Silfhout, G. van, Woldhuis, E., & Leeuwen, B. van. (2017). *Leerplankundige analyse PISA 2015*. (2017). Enschede: SLO.

Hoogland, K. (2016). *Images of numeracy: investigating the effects of visual representations of problem situations in contextual mathematical problem solving*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.

Hutten, O., Van den Bergh, J., Van den Brom-Snijders, P., & Van Zanten, M. (2014). *Rekendidactiek meten en meetkunde* (2e ed.). Amersfoort, Nederland: Thieme Meulenhoff.

Inspectie van het Onderwijs. (2017). *Peil. onderwijs: Taal en rekenen aan het einde van het basisonderwijs*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.

Inspectie van het Onderwijs (2017). *De Staat van het Onderwijs 2015/2016*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool: Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Nelissen, J. M. (2007). Recent onderzoek naar transfer. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 11-18.

Nelissen, J. M. (2015). Big ideas. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 34, 98-101.

Ohlsson, S. (2011). *Deep Learning: How the Mind Overrides Experience*. Cambridge: Cambridge University Press.

Oonk, W., & De Goeij, E. T. (2006). Wiskundige attitudevorming. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 25(4), 37-39.

Oonk, W., Keijzer, R., Lit, S., Den Engelsens, M., Lek, A., & Van Waveren Hogervorst, C. (2011). *Rekenen-wiskunde in de praktijk: Kerninzichten*. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.

Platform Onderwijs 2032. (2016). *Ons Onderwijs2032 Eindadvies*. Den Haag: Platform Onderwijs 2032.

Platform Wiskunde Nederland. (2012). *Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands; Vision document 2025*. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.



Platform Wiskunde Nederland. (2014). *Tussen wal en schip. Wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland*. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

Rijborz, D. (2018). Op zoek naar een vakoverstijgende didactiek voor rekenen-wiskunde en aardrijkskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs. *Volgens Bartjens - Ontwikkeling en Onderzoek*, 47(5), 41-50.

Ruijsenaars, A.J.J.M. et al. (2004). *Rekenproblemen en Dyscalculie*. Rotterdam: Lemniscaat B.V.

Schmeier, M. (2017). *Effectief rekenonderwijs op de basisschool*. Huizen: Uitgeverij Pica.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis – Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens A., Engel, M. Susperreguy, M.I., & Chen M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697.

Sjoers, S. (2017). *Sterke rekenaars in het basisonderwijs*. Amersfoort: CPS Onderwijsontwikkeling en advies.

SLO. (z.j.). Cursus Curriculumontwerp. Geraadpleegd op 17 mei 2018 van [http://www.cursuscurriculumontwerp.slo.nl/ariadne/loader.php/projects/slo/leergangonderwijsontwerpen/site/kennisbank/Doorlopende\\_Leerlijnen.docx/](http://www.cursuscurriculumontwerp.slo.nl/ariadne/loader.php/projects/slo/leergangonderwijsontwerpen/site/kennisbank/Doorlopende_Leerlijnen.docx/).

Streefland, L. (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational Studies in Mathematics*, 13(3), 233-255.

Streun, A. van (2001). Het denken bevorderen. Geraadpleegd op 8 oktober 2018 van [www.rug.nl](http://www.rug.nl).

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (2008). Het voorkomen van ongecijferdheid. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 27(3/4), 15-18.

UNESCO. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. Parijs: UNESCO.

Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO. (2013). *Denken & doen: wiskunde op de havo en vwo per 2015*. Utrecht: Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs

Willingham, D.T. (2008). Critical thinking. Why is it so hard to teach? *Arts Education Policy Review*, 109(4), 21-32.

Willingham, D.T. (2012). *When can you trust the experts? How to tell good science from bad in education*. Hoboken NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Zanten, M. van, & Notten, C. (Red.). (2017). *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw*. Enschede/Utrecht: SLO/Panama.



Zanten, M. van. (2017). *Leerplankundige verkenning van TIMSS-trends*. Enschede: SLO.

Zanten, van M (2018). Klopt dit wel?, *Volgens Bartjens*, 37(5), 22 – 26.